ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Е.А. Киселева
ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ НЕПОЛНЫХ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена изучению систем сдвигов функций Гаусса и Лоренца и разработке эффективных способов разложения в ряды по этим системам в связи с их использованием для обработки сигналов. В то время как сдвигам функции Гаусса посвящено достаточно много работ, система сдвигов функции Лоренца (которую также называют распределением Коши и функцией Брейта-Вигнера) в литературе практически не рассматривалась. Значительная часть работы посвящена анализу свойств исследуемых систем в зависимости от их параметра с целью оптимизации алгоритмов, построенных на их основе.

В главе 1 вводятся и обсуждаются основные понятия, излагается математический аппарат, который будет использоваться в диссертации, дается краткая характеристика базовых методов, приводится обзор результатов, связанных с изучаемыми вопросами.

В главе 2 проводится разработка нескольких способов разложения по указанным системам функций. Получены явные формулы для коэффициентов узловой функций, порожденной системой целочисленных сдвигов функции Лоренца (теорема 2.1). Построена биортогональная система для семейства равномерных сдвигов функции Лоренца, принадлежащая образованному ими подпространству (теорема 2.2), проведен анализ устойчивости разложения по этой системе. Построены два новых параметрических семейства биортогональных систем для равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца, лежащие вне подпространств исходных сдвигов (теоремы 2.3, 2.4). Доказано, что целые сдвиги функции Лоренца образуют систему Рисса и найдены для нее значения верхней и нижней констант (теорема 2.5), найдены предельные значения этих констант при стремлении параметра к бесконечности (теорема 2.6). Проанализированы базисные свойства систем сдвигов функций Гаусса и Лоренца в зависимости от параметра. Доказано, что узловая функция, порожденная системой целых сдвигов функции Лоренца, при стремлении параметра ширины к бесконечности, стремится по норме пространства к функции отсчетов $sinc$(теорема 2.7).

Глава 3 посвящена созданию и анализу алгоритмов аппроксимации функциональных зависимостей на основе математического аппарата, разработанного в главе 2. Производятся вычислительные эксперименты с тестовыми функциями, дается практическая оценка устойчивости процедуры разложения по исследуемым системам при помощи констант Рисса. Показано, что предложенный интерполяционный алгоритм обеспечивает надежный синтез. Дана оценка эффективности синтеза при наличии шума. Для этого к функции, состоящей из нескольких функций Лоренца добавляется случайный шум различной амплитуды. Расчеты показали, что максимальный уровень шума, при котором алгоритм продолжает работать стабильно составляет 10 % относительно амплитуды исходной функциональной зависимости. В то же время для анализа реальных функциональных зависимостей использование рассмотренных функций, состоящих из пиков одной фиксированной ширины, является неприменимым, так как удается распознавать только пики, находящиеся в узлах сетки. Показано, каким образом с помощью метода биортогональных систем можно проводить разделение нескольких функций Гаусса и нескольких функций Лоренца разной ширины, но с общим центром. Построена биортогональная система, порожденного сверткой функций Гаусса и Лоренца. Установлена ее связь с узловой функцией для семейства равномерных сдвигов контура Фойгта (теорема 3.1).

В главе 4 изучаются полная и неполные системы когерентных состояний. Для полной системы найдены формулы для констант Рисса (теорема 4.1) и показано, что для нее нельзя провести устойчивую ортогонализацию. Получены формулы для констант Рисса некоторых неполных подсистем когерентных состояний (теорема 4.2), для которых можно провести устойчивую ортогонализацию. Дан подробный обзор физических приложений когерентных состояний.

Отмечу следующие замечания.

После определения 1.4, в котором маска $D(t)$ определяется как ряд Фурье с коэффициентами d_k, утверждается (1.21). Читателю трудно понять, поскольку не сказано, о каких коэффициентах d_k идет речь. Вероятно, автор имел в виду, что маска $D(t)$ ассоциирована с функцией φ, обсуждаемой выше, и коэффициенты d_k, удовлетворяют (1.20). При этом нехорошо называть $D(t)$ рядом Фурье, поскольку про d_k ничего не известно кроме (1.20), и не любой тригонометрический ряд является рядом Фурье какой-то функции.

Некоторые доказательства можно упростить. Например, для доказательства теоремы 2.7 можно записать центральную часть соотношения

(2.19) в виде

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\neq 0} |\widehat{\varphi_L}(\xi+k)|^2 d\xi + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\varphi_L}(\xi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right|^2 d\xi$$

Используя полученные ранее формулы, нетрудно видеть, что обе подинтегральные функции стремятся к нулю при почти всех ξ. Чтобы осуществить предельный переход, осталось воспользоваться теоремой Лебега, заметив, что наличие суммируемой мажоранты следует из теоремы 2.6. В теореме 4.1 равенство (4.7), с учетом равенства Парсеваля, завершает ее доказательство, непонятно зачем понадобилась теорема о среднем.

Доказательствео теоремы 4.2 не доведено до конца, для его завершения требуются еще некоторые выкладки и рассуждения.

Стр. 77, 14^+: $\exp(-a^2) \to \exp(-a^2/2)$

Стр. 30, 10^+: $\varphi \to \varphi_k$

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Полученные результаты представляют теоретический интерес и могут быть использованы в инженерных приложениях. Все представленные в диссертации утверждения правильные. Основные результаты опубликованы в 7 печатных работах, 5 из них в журналах, входящих в список ВАК. Текст диссертации написан подробно и аккуратно, все теоремы снабжены доказательствами. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Считаю, что работа удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемых к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Профессор кафедры высшей математики
и кафедры математического анализа
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
"Санкт-Петербургский государственный университет"
(Санкт-Петербург, 199034, Университетская наб. 7-9;
7(812) 3282000, spbu@ spbu.ru),

доктор физ.-мат. наук (М.А.Скопина)

ЛИЧНУЮ ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
НАЧАЛЬНИК ОТДЕЛА КАДРОВ №3

13.01.2017

Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей